|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Der Satz des Thales  **Der Satz des Thales: Entdeckungen mit DGS (dynamischer Geometrie-Software)**  Name: …………………………………………….. | Arbeit mit DGS  Klasse: ………………… | April 2024 |

**Untersuchungen am Dreieck mit DGS**

1

Ein Bild, das Reihe, Dreieck enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Probiere aus, wie sich der Innenwinkel am Punkt verändert, wenn du verschiebst. Wo wird der Winkel größer? Wo wird er kleiner?

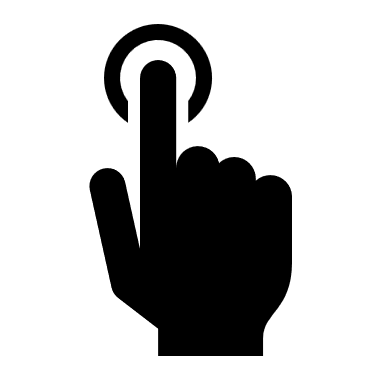
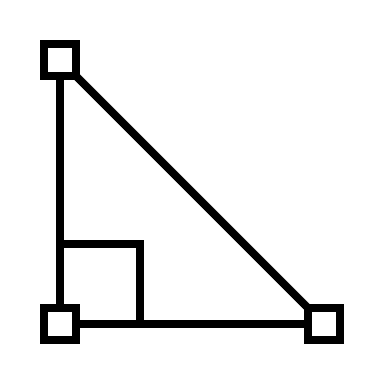
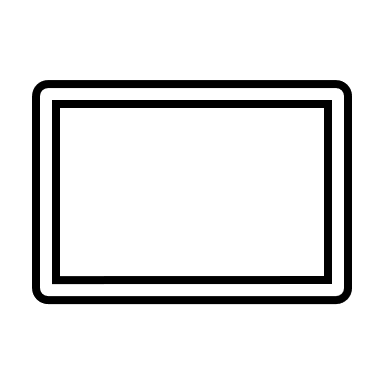
Suche nun mehrere Stellen, an denen der Winkel dieselbe Größe hat. Wie viele solcher Stellen findest du? Markiere sie mit Klick auf das ⊕. Notiere alle Beobachtungen, die du machen kannst.



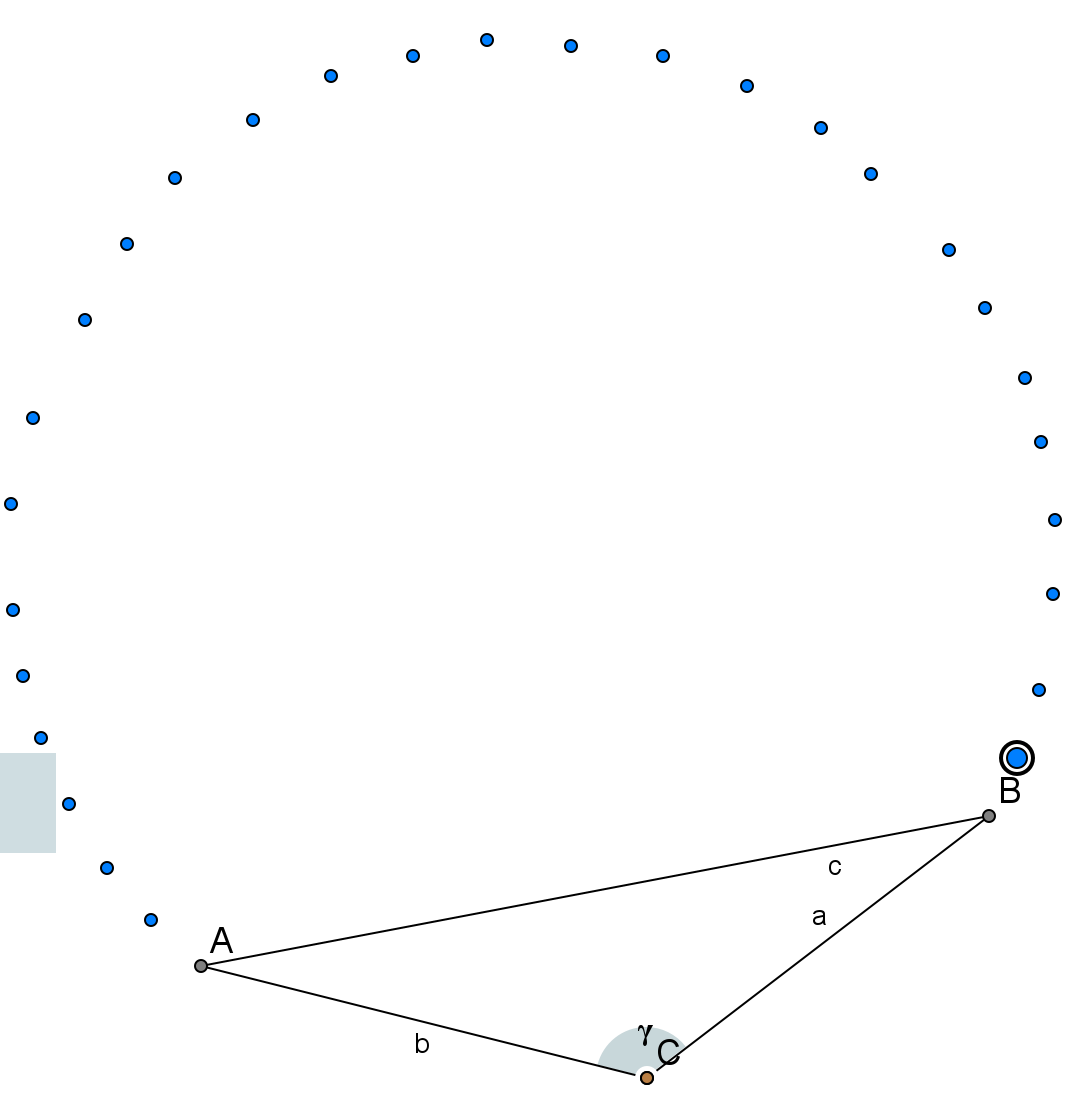
Ich habe die folgenden Größen für untersucht: ………………..………………………………………………… Meine Beobachtungen: ………………………………..………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………………………………………………………………………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………….

z.B. 130°, 50°

* Je näher der Punkt C an der Strecke liegt, desto größer wird der Winkel . Bewegt man C von der Strecke weg, wird kleiner. Der Winkel kann höchstens 180° groß werden.
* Egal, welche Winkelgröße man untersucht: Man findet unzählig viele Stellen für Punkt C, sodass diese Größe hat.
* **Wenn** der Winkel eine festgelegte Größe hat, **dann** liegt C auf einem Kreisbogen. Dieser Kreisbogen ist dabei umso größer, je kleiner ist. Die Strecke ist eine Sehne des Kreisbogens.



Bildschirmaufnahme in der DGS:



130°

130°

Ein Bild, das Reihe enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**Untersuchungen am Dreieck mit DGS**

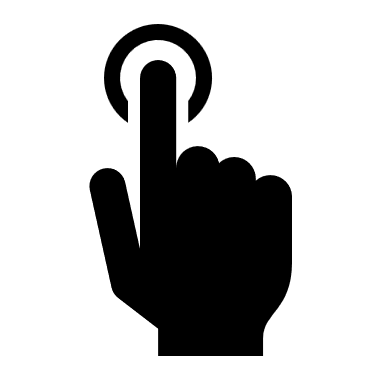
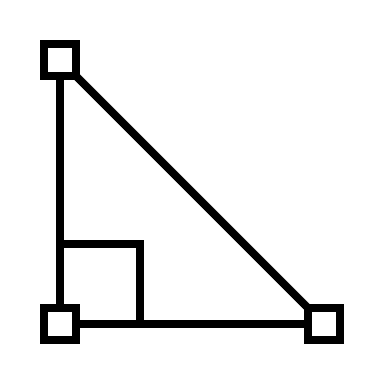
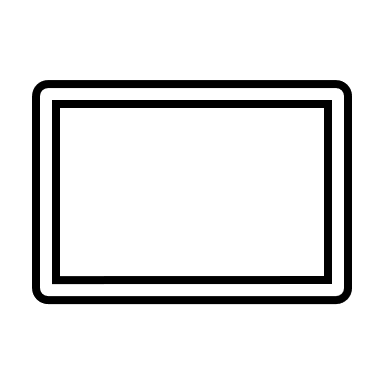
2

Betrachte den Fall genauer. Was kannst du über die Lage von Punkt in diesem Fall sagen? Formuliere eine Vermutung. Bestätige deine Vermutung durch Konstruktion.

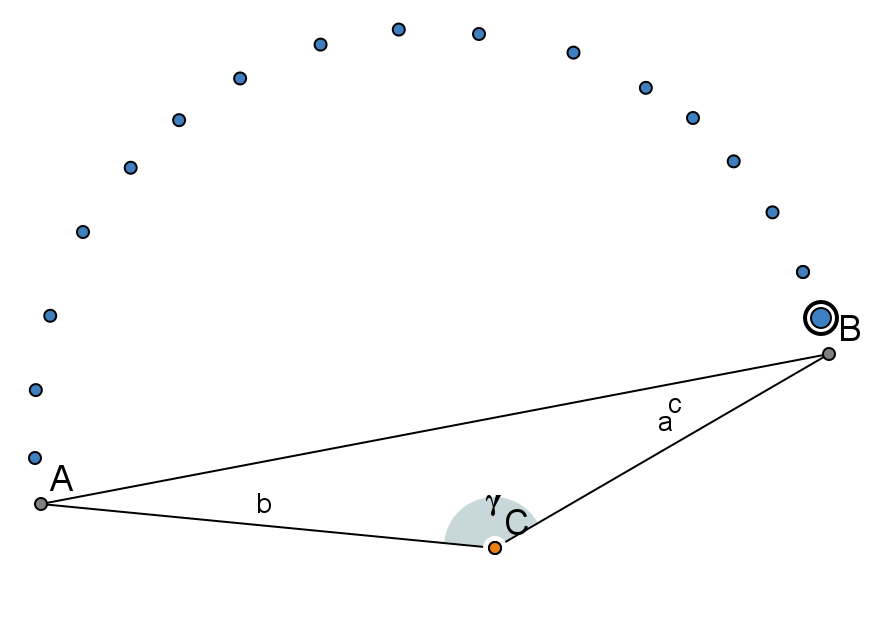
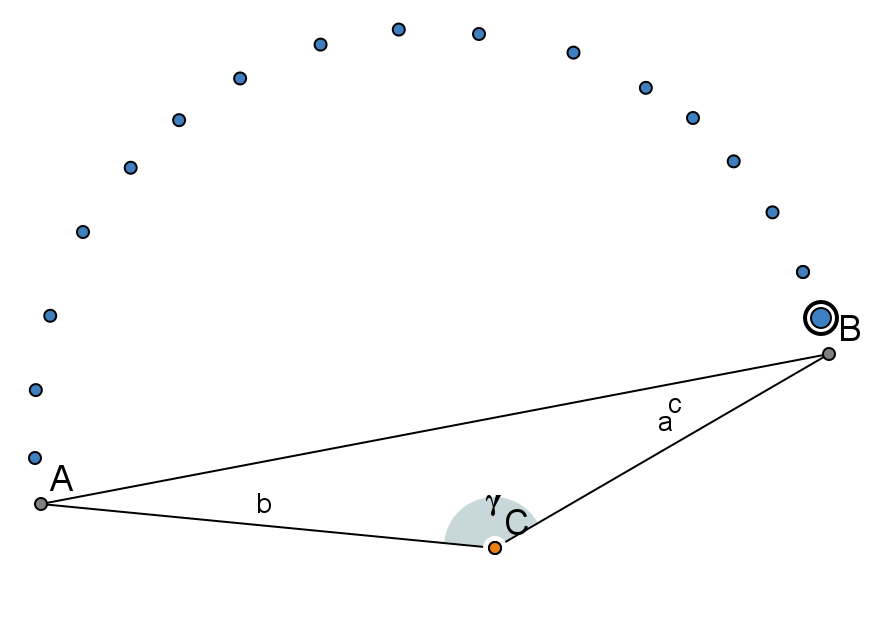


Meine Vermutung: ………………………………………………………………………………………………….……………… ………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

**Wenn** = 90° groß ist, **dann** liegt Punkt C auf einem Kreis mit dem Durchmesser .

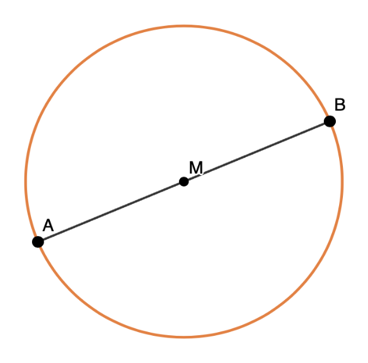


Bildschirmaufnahme in der DGS:

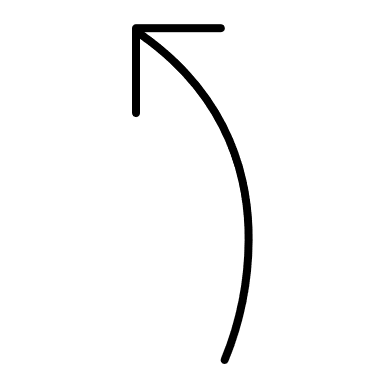


130°

**Untersuchungen am Dreieck mit DGS**



**Thaleskreis**



**Definition**

Zu jeder Strecke mit dem Mittelpunkt lässt sich ein Kreis konstruieren, der als Mittelpunkt und als Durchmesser hat. Dieser Kreis heißt **Thaleskreis** über dem Durchmesser .

Konstruiere in der Figur mit dem Kreis-Tool den Thaleskreis über dem Durchmesser .

Wie groß ist der Winkel , wenn …

1. auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser liegt?
2. außer-/innerhalb des Thaleskreises über dem Durchmesser liegt?

Formuliere Vermutungen.

*Hinweis:* Mit Klick auf das ⊕ kannst du dir Winkelgrößen merken.

3



Meine Vermutungen: ………………………………………..…………………………………………………….……………… …………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

1. **Wenn** der Punkt C auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser liegt, **dann** ist der Winkel = 90° groß.
2. **Wenn** der Punkt C außerhalb des Thaleskreises über dem Durchmesser liegt, **dann** ist der Winkel kleiner als 90°. **Wenn** der Punkt C innerhalb des Thaleskreises über dem Durchmesser liegt, **dann** ist der Winkel größer als 90°.

………………………………………..……………………………………………………………………………………….……………… …………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

In der Vermutung aus Aufgabe 2 ist „“ die Voraussetzung und „*C liegt auf dem Kreis mit dem Durchmesser* die Behauptung. Dahingegen ist in der Vermutung aus Aufgabe 3a „*C liegt auf dem Kreis mit dem Durchmesser* “ die Voraussetzung und „“ die Behauptung. Die Vermutungen aus den Aufgaben 2 und 3a sind daher Umkehrungen voneinander.

Hinweis: In der DGS haben wir jeweils die Voraussetzungen festgelegt. Die Behauptungen konnten wir als Konsequenzen beobachten.

**Untersuchungen am Dreieck mit DGS**



Findest du einen Unterschied zwischen den Vermutungen aus Aufgabe 2 und Aufgabe 3a? Begründe.

4

**Info: Der Satz des Thales und seine Umkehrung**

**Satz des Thales**

***Wenn*** in einem Dreieck der Punkt auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser liegt, ***dann*** ist der Winkel beim Punkt ein rechter Winkel.

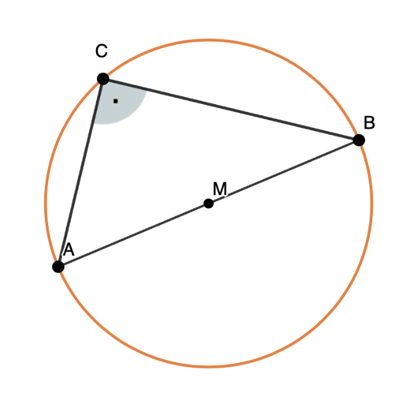


Notiere die Voraussetzungen und Behauptung des **Satzes des Thales** unter die Abbildungen:

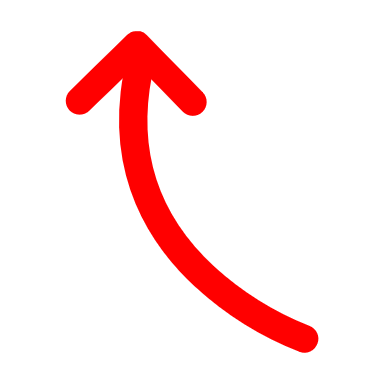
Ein Bild, das Kreis, Reihe enthält.

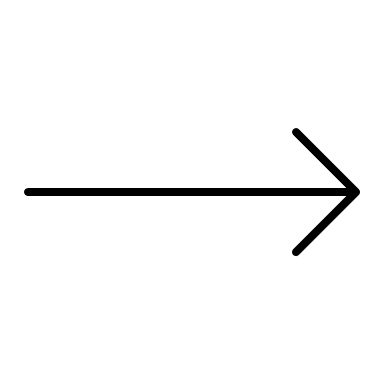
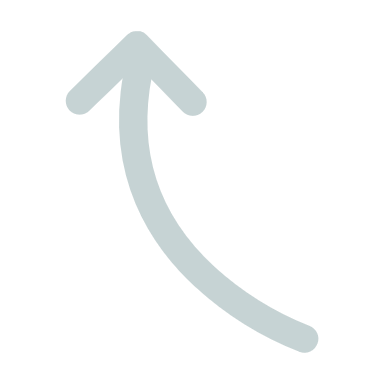
Automatisch generierte Beschreibung

Voraussetzungen: ………………………………………..…………..…………………………………………….…………………………………………………………………….



Behauptung: ………………………………………..…………..…………………………………………….…………………………………………………………………….





Der Winkel ist 90° groß.

C liegt auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser .

**Info: Der Satz des Thales und seine Umkehrung**

Du weißt bereits: Die **Umkehrung** einer mathematischen Aussage entsteht, indem man die Voraussetzung und die Behauptung vertauscht.

**Umkehrung des Satz des Thales**

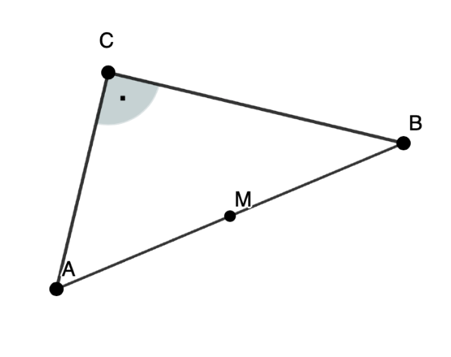
***Wenn*** in einem Dreieck der Winkel beim Punkt ein rechter Winkel ist,

***dann*** liegt der Punkt auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser

Notiere die Voraussetzungen und Behauptung der **Umkehrung des Satzes des Thales** unter die Abbildungen:



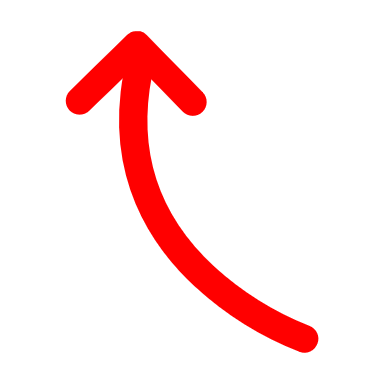
Behauptung: ………………………………………..…………..…………………………………………….…………………………………………………………………………….

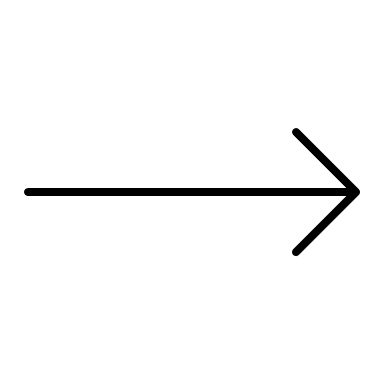


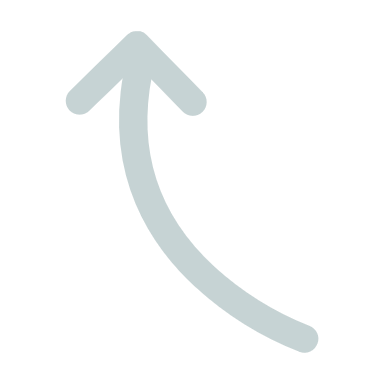
Voraussetzungen: ………………………………………..…………..…………………………………………….…………………………………………………………………….

Ein Bild, das Kreis, Reihe, Diagramm enthält.

Automatisch generierte Beschreibung







C liegt auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser .

Der Winkel ist 90° groß.

**Übungsaufgaben**

Für welche Figuren kannst du den gelb markierten Winkel mithilfe des Satzes des Thales unmittelbar bestimmen?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a) | ✅ Ja  ☐ Nein | b) | ✅ Ja  ☐ Nein | c) | ☐ Ja  ❌ Nein |
| d) | ☐ Ja  ❌ Nein | e) | ☐ Ja  ❌ Nein | f) | ✅ Ja  ☐ Nein |
| g) | ☐ Ja  ❌ Nein | h) | ☐ Ja  ❌ Nein | i) | ☐ Ja  ❌ Nein |

1

Lösung:



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a) |  | b) |  | c) |  |
| d) |  | e) |  | f) |  |
| g) |  | h) |  | i) |  |

In den folgenden Figuren ist M der Mittelpunkt des Kreises. Bestimme die Größen der bezeichneten Winkel. Begründe.

2

Weil C auf dem Thaleskreis über liegt, gilt

(Satz des Thales).

Also ist .

Weil und Radien desselben Kreises sind, ist das Dreieck gleichschenklig. Wegen dem Basiswinkelsatz gilt dort .

Wegen dem Innenwinkelsatz gilt

.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a) | Ein Bild, das Kreis, Reihe, Diagramm, Design enthält.  Automatisch generierte Beschreibung | Weil C auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser liegt, gilt: = 90° (Satz des Thales).  Wegen dem Innenwinkelsatz gilt    ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..……. |
|  |  | |
| b) | Ein Bild, das Kreis, Reihe, Diagramm enthält.  Automatisch generierte Beschreibung | Weil C auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser liegt, gilt: = 90° (Satz des Thales).  Wegen dem Innenwinkelsatz gilt  .  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..……. |
|  | |  |
|  | | |
| c) |  | ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..…….  ……..……..……..……..……..……..……..……..……..……..……. |

Ein Bild, das Diagramm, Kreis, Reihe enthält.

Automatisch generierte BeschreibungEin Bild, das Diagramm, Kreis, Reihe enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

* Nur wenn der Punkt C auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser liegt, gilt und . *Begründung:* Nur wenn C auf dem Thaleskreis liegt, dann sind die Strecken , und Radien des Kreises und daher gleich lang. Die Dreiecke MBC und MCA sind dann gleichschenklig und es gilt dort der Basiswinkelsatz. Demnach sind ihre Basiswinkel und (im Dreieck MBC) bzw. und (im Dreieck MCA) jeweils gleich groß.
* Es gilt , egal wo C liegt.
* Es gilt , egal wo Cliegt.

*Begründung:* Dieser Zusammenhang gilt wegen dem Innenwinkelsatz für jedes Dreieck.

Weitere Vermutungen:

* Es gilt, wenn C auf dem Thaleskreis liegt.

*Begründung:* Dieser Zusammenhang folgt aus der dritten Vermutung und dem Satz des Thales.

* Wenn C außerhalb des Thaleskreises liegt, ist . Wenn C innerhalb des Thaleskreises liegt, ist .
* Man findet eine Position für C, sodass .

1

Meine Vermutungen und Begründungen: …..………………………………………………………………..…………… ……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………………………………………………………………………..………………………………..………………………………..………………………………..…………………………………………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………….………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………….………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………….………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………….………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………………………………………………

……………..………………………………..………………………………..………………………………….………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………….………..………………………………..………………………………..………………………………..………………………………………………………………………

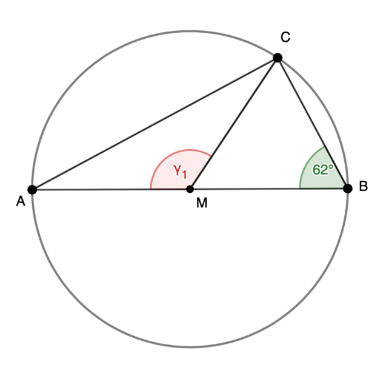
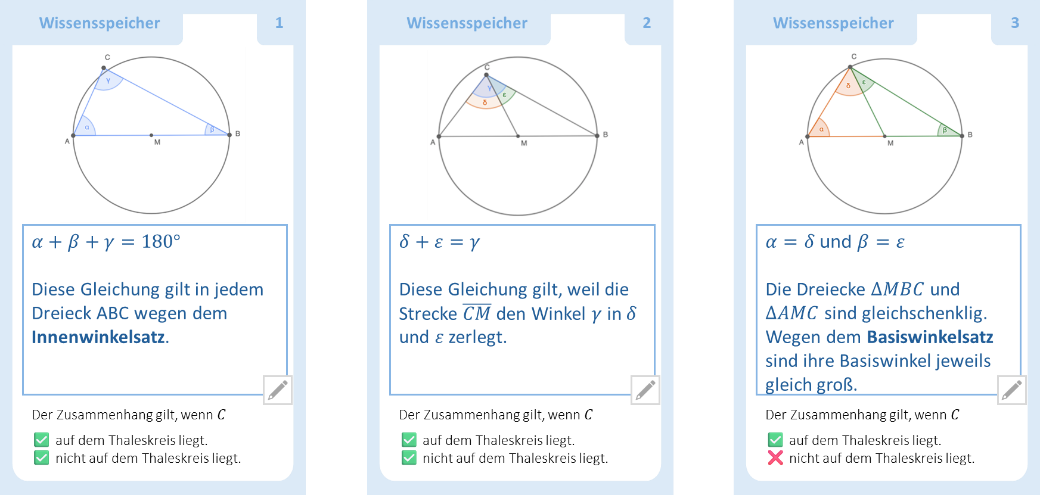
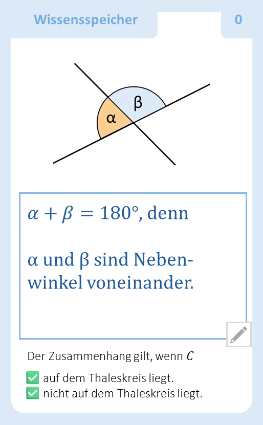
Zeichne in die Figur zusätzlich die Strecke ein und miss die Winkel und (siehe Abb. rechts).

Bewege . Welche Zusammenhänge zwischen den Winkeln kannst du beobachten? Welche Zusammen-hänge gelten nur, wenn auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser liegt?

Formuliere so viele Vermutungen wie möglich. Versuche einige davon zu begründen.



**Den Satz des Thales begründen – Teil I**

Ein Bild, das Kreis, Reihe, Design enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

* Wenn , dann (Basiswinkelssatz)
* Wenn , dann (Innenwinkelsatz)
* Wenn , dann (Nebenwinkelsatz)



Arbeite alleine.

**Berechne** den Winkel .

Nutze dafür die Zusammenhänge auf den **Karten**.

Schreibe die Zusammenhänge, die du für die Berechnung nutzt in **Wenn-Dann-Form** auf.

…………………………………….…………………………………………………………………………………………………..…………

…………………………………….…………………………………………………………………………………………………..…………

…………………………………….…………………………………………………………………………………………………..…………

…………………………………….…………………………………………………………………………………………………..…………

…………………………………….…………………………………………………………………………………………………..…………

…………………………………….…………………………………………………………………………………………………..…………

…………………………………….…………………………………………………………………………………………………..…………



3

Arbeitet zu zweit.

Betrachtet die Figuren auf den Karten.

1. Schreibt diesen **Zusammenhang** als Gleichung auf die Karte.
2. Begründet kurz, **warum** der Zusammenhang gilt.
3. Kreuzt an, unter welchen **Voraussetzungen**  
   der Zusammenhang gilt.

2

**Den Satz des Thales begründen – Teil II**

Der Satz des Thales besagt

Wenn in einem Dreieck der Punkt auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser liegt, dann ist der Winkel beim Punkt ein rechter Winkel.

Ein Bild, das Entwurf, Menschliches Gesicht, Darstellung, Zeichnung enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Aber **warum** ist das eigentlich so?

Ein Bild, das Reihe, Kreis, Diagramm enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Beweise, warum der Satz des Thales gilt. Gehe so vor:

* Rufe dir noch einmal ins Gedächtnis, welche Voraussetzung im Satz des Thales gegeben ist und welche Behauptung du zeigen musst.
* Gehe von der Voraussetzung aus. Begründe mithilfe dir bekannter Zusammenhänge zwischen Winkeln, warum die Behauptung gilt. Die Zeichnung rechts kann dir dabei eine Hilfe sein.

1



………………………………………………………………………………………..…………………………………………………….…....

……………………………………..…………………………………………………….…...……………………………………..…………..

Meine Begründung: ……………………………………………………….…………………………………………………..…..… ………..…………………………………………………………………………………………………………………………………..………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………….…………………………………………………………………………………………………………………………………………………….…………………………………………………………………………………………………………………………………………………..………………………………………………………………………………………..……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..…………………………………………………………………………………………………………………………………………………..………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..……………………………………………………………………………………………………………………………………………………..………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..…

……………………………………………………………………………………………………………………………………………………

C liegt auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser

Gegeben ist (Voraussetzung):

Ich muss zeigen (Behauptung):

Ein Bild, das Reihe, Diagramm, Kreis enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

1. Weil C auf dem Thaleskreis liegt, sind die Strecken , und Radien desselben Kreises und daher gleich lang. Die Dreiecke AMC und MBC sind deswegen gleichschenklig. Wegen dem Basiswinkelsatz gilt in diesen Dreiecken und .
2. Außerdem gilt .
3. Im Dreieck ABC gilt wegen dem Innenwinkelsatz .

Also gilt wegen (2): .

Und wegen (1):

.

Also gilt wegen (2): .

Stellt euch eure Beweise gegenseitig vor und überprüft, ob sie richtig sind.

Findet ihr die Beweise überzeugend? Was würdet ihr verbessern?

2

Für welchen Schritt im Beweis war es entscheidend, dass C auf dem Thaleskreis liegt?

3

Die Voraussetzung, dass C auf dem Thaleskreis mit dem Durchmesser liegt ist entscheidend für Schritt (1) in der Begründung, denn nur so, sind die Dreiecke AMC und MBC gleichschenklig und der Basiswinkelssatz gilt.

………………………………………………………………………………………..…………………………………………………….…....

……………………………………..…………………………………………………….…...……………………………………..…………..

……………………………………………………….………………………………………………………………..…………………..…..… ………..…………………………………………………………………………………………………………………………………..………

……………………………………………………………………………………………………………………………………………….…………………………………………………………………………………………………………………………………………………….…………………………………………………………………………………………………………………………………………………..………………………………………………………………………………………..……………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..…………………………………………………………………………………………………………………………………………………..………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

Ein Bild, das Reihe enthält.

Automatisch generierte BeschreibungEin Bild, das Reihe enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**Weitere Übungsaufgaben**

**c)** Weise für die folgenden Dreiecke mithilfe eines Zirkels nach, ob der markierte Winkel ein rechter Winkel ist. Nutze hierfür die **Umkehrung des Satzes des Thales** aus.

Ein Bild, das Reihe enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

**a)** Konstruiere mithilfe des **Satzes des Thales** zu der gegebenen Seite mindestens zwei verschiedene Dreiecke mit .

**b)** Konstruiere mithilfe des **Satzes des Thales** ein beliebiges Dreieckmit und

**d)\*** Konstruiere mithilfe des Satzes des Thales ein beliebiges Dreieckmit , und